2019年普通高等学校招生全国统一考试

数 学（理）（北京卷）

本试卷共5页，150分。考试时长120分钟。考生务必将答案答在答题卡上，在试卷上作答无效。考试结束后，将本试卷和答题卡一并交回。

第一部分（选择题 共40分）

一、选择题共8小题，每小题5分，共40分。在每小题列出的四个选项中，选出符合题目要求的一项。

（1）已知复数*z*=2+i，则

（A） （B） （C）3 （D）5

（2）执行如图所示的程序框图，输出的*s*值为



（A）1 （B）2 （C）3 （D）4

（3）已知直线*l*的参数方程为（*t*为参数），则点（1，0）到直线*l*的距离是

（A） （B） （C） （D）

（4）已知椭圆（*a*＞*b*＞0）的离心率为，则

（A）*a*2=2*b*2 （B）3*a*2=4*b*2 （C）*a*=2*b* （D）3*a*=4*b*

（5）若*x*，*y*满足，且*y*≥−1，则3*x+y*的最大值为

（A）−7 （B）1 （C）5 （D）7

（6）在天文学中，天体的明暗程度可以用星等或亮度来描述．两颗星的星等与亮度满足*m*2−*m*1=lg，其中星等为*mk*的星的亮度为*Ek*（*k*=1，2）．已知太阳的星等是−26.7，天狼星的星等是−1.45，则太阳与天狼星的亮度的比值为

（A）1010.1 （B）10.1 （C）lg10.1 （D）10−10.1

（7）设点*A*，*B*，*C*不共线，则“与的夹角为锐角”是“”的

（A）充分而不必要条件 （B）必要而不充分条件

（C）充分必要条件 （D）既不充分也不必要条件

（8）数学中有许多形状优美、寓意美好的曲线，曲线*C*：就是其中之一（如图）．给出下列三个结论：



①曲线*C*恰好经过6个整点（即横、纵坐标均为整数的点）；

②曲线*C*上任意一点到原点的距离都不超过；

③曲线*C*所围成的“心形”区域的面积小于3．

其中，所有正确结论的序号是

（A）① （B）② （C）①② （D）①②③

第二部分（非选择题 共110分）

二、填空题共6小题，每小题5分，共30分。

（9）函数*f*（*x*）=sin22*x*的最小正周期是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

（10）设等差数列{*an*}的前*n*项和为*Sn*，若*a*2=−3，*S*5=−10，则*a*5=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_，*Sn*的最小值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

（11）某几何体是由一个正方体去掉一个四棱柱所得，其三视图如图所示．如果网格纸上小正方形的边长为1，那么该几何体的体积为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．



（12）已知*l*，*m*是平面外的两条不同直线．给出下列三个论断：

①*l*⊥*m*； ②*m*∥； ③*l*⊥．

以其中的两个论断作为条件，余下的一个论断作为结论，写出一个正确的命题：\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

（13）设函数*f*（*x*）=e*x*+*a*e−*x*（*a*为常数）．若*f*（*x*）为奇函数，则*a*=\_\_\_\_\_\_\_\_；若*f*（*x*）是**R**上的增函数，则*a*的取值范围是\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

（14）李明自主创业，在网上经营一家水果店，销售的水果中有草莓、京白梨、西瓜、桃，价格依次为60元/盒、65元/盒、80元/盒、90元/盒．为增加销量，李明对这四种水果进行促销：一次购买水果的总价达到120元，顾客就少付*x*元．每笔订单顾客网上支付成功后，李明会得到支付款的80%．

①当*x*=10时，顾客一次购买草莓和西瓜各1盒，需要支付\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_元；

②在促销活动中，为保证李明每笔订单得到的金额均不低于促销前总价的七折，则*x*的最大值为\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_．

三、解答题共6小题，共80分。解答应写出文字说明，演算步骤或证明过程。

（15）（本小题13分）

在△*ABC*中，*a*=3，*b*−*c*=2，cos*B*=．

（Ⅰ）求*b*，*c*的值；

（Ⅱ）求sin（*B*–*C*）的值．

（16）（本小题14分）

如图，在四棱锥*P*–*ABCD*中，*PA*⊥平面*ABCD*，*AD*⊥*CD*，*AD*∥*BC*，*PA*=*AD*=*CD*=2，*BC*=3．*E*为*PD*的中点，点*F*在*PC*上，且．

（Ⅰ）求证：*CD*⊥平面*PAD*；

（Ⅱ）求二面角*F–AE–P*的余弦值；

（Ⅲ）设点*G*在*PB*上，且．判断直线*AG*是否在平面*AEF*内，说明理由．



（17）（本小题13分）

改革开放以来，人们的支付方式发生了巨大转变．近年来，移动支付已成为主要支付方式之一．为了解某校学生上个月A，B两种移动支付方式的使用情况，从全校学生中随机抽取了100人，发现样本中A，B两种支付方式都不使用的有5人，样本中仅使用A和仅使用B的学生的支付金额分布情况如下：

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 支付金额（元）支付方式 | （0，1000] | （1000，2000] | 大于2000 |
| 仅使用A | 18人 | 9人 | 3人 |
| 仅使用B | 10人 | 14人 | 1人 |

（Ⅰ）从全校学生中随机抽取1人，估计该学生上个月A，B两种支付方式都使用的概率；

（Ⅱ）从样本仅使用A和仅使用B的学生中各随机抽取1人，以*X*表示这2人中上个月支付金额大于1000元的人数，求*X*的分布列和数学期望；

（Ⅲ）已知上个月样本学生的支付方式在本月没有变化．现从样本仅使用A的学生中，随机抽查3人，发现他们本月的支付金额都大于2000元．根据抽查结果，能否认为样本仅使用A的学生中本月支付金额大于2000元的人数有变化？说明理由．

（18）（本小题14分）

已知抛物线*C*：*x*2=−2*py*经过点（2，−1）．

（Ⅰ）求抛物线*C*的方程及其准线方程；

（Ⅱ）设*O*为原点，过抛物线*C*的焦点作斜率不为0的直线*l*交抛物线*C*于两点*M*，*N*，直线*y*=−1分别交直线*OM*，*ON*于点*A*和点*B*．求证：以*AB*为直径的圆经过*y*轴上的两个定点．

（19）（本小题13分）

已知函数．

（Ⅰ）求曲线的斜率为1的切线方程；

（Ⅱ）当时，求证：；

（Ⅲ）设，记在区间上的最大值为*M*（*a*）．当*M*（*a*）最小时，求*a*的值．

（20）（本小题13分）

已知数列{*an*}，从中选取第*i*1项、第*i*2项、…、第*im*项（*i*1<*i*2<…<*im*），若，则称新数列为{*an*}的长度为*m*的递增子列．规定：数列{*an*}的任意一项都是{*an*}的长度为1的递增子列．

（Ⅰ）写出数列1，8，3，7，5，6，9的一个长度为4的递增子列；

（Ⅱ）已知数列{*an*}的长度为*p*的递增子列的末项的最小值为，长度为*q*的递增子列的末项的最小值为．若*p*<*q*，求证：<；

（Ⅲ）设无穷数列{*an*}的各项均为正整数，且任意两项均不相等．若{*an*}的长度为*s*的递增子列末项的最小值为2*s*–1，且长度为*s*末项为2*s*–1的递增子列恰有2*s*-1个（*s*=1，2，…），求数列{*an*}的通项公式．

2019年普通高等学校招生全国统一考试

数学（理）（北京卷）参考答案

一、选择题（共8小题，每小题5分，共40分）

（1）D （2）B （3）D （4）B （5）C （6）A （7）C （8）C

二、填空题（共6小题，每小题5分，共30分）

（9） （10）0  （11）40 （12）若，，则.（答案不唯一）

（13）  （14）130 15

三、解答题（共6小题，共80分）

（15）（共13分）

解：（Ⅰ）由余弦定理，得

.

因为，

所以.

解得.

所以.

（Ⅱ）由得.

由正弦定理得.

在中，∠*B*是钝角，

所以∠*C*为锐角.

所以.

所以.

（16）（共14分）

解：（Ⅰ）因为*PA*⊥平面*ABCD*，所以*PA*⊥*CD*．

又因为*AD*⊥*CD*，所以*CD*⊥平面*PAD*．

（Ⅱ）过*A*作*AD*的垂线交*BC*于点*M*．

因为*PA*⊥平面*ABCD*，所以*PA*⊥*AM*，*PA*⊥*AD*．

如图建立空间直角坐标系*A*-*xyz*，则*A*（0，0，0），*B*（2，1，0），*C*（2，2，0），*D*（0，2，0），*P*（0，0，2）．

因为*E*为*PD*的中点，所以*E*（0，1，1）．

所以．

所以.

设平面*AEF*的法向量为***n***=（*x*，*y*，*z*），则

即

令*z*=1，则．

于是．

又因为平面*PAD*的法向量为***p***=（1，0，0），所以.

由题知，二面角*F*-*AE*-*P*为锐角，所以其余弦值为．



（Ⅲ）直线*AG*在平面*AEF*内．

因为点*G*在*PB*上，且，

所以.

由（Ⅱ）知，平面*AEF*的法向量.

所以.

所以直线*AG*在平面*AEF*内.

（17）（共13分）

解：（Ⅰ）由题意知，样本中仅使用A的学生有18+9+3=30人，仅使用B的学生有10+14+1=25人，A，B两种支付方式都不使用的学生有5人.

故样本中A，B两种支付方式都使用的学生有100−30−25−5=40人.

所以从全校学生中随机抽取1人，该学生上个月A，B两种支付方式都使用的概率估计为.

（Ⅱ）*X*的所有可能值为0，1，2.

记事件*C*为“从样本仅使用A的学生中随机抽取1人，该学生上个月的支付金额大于1000元”，事件*D*为“从样本仅使用B的学生中随机抽取1人，该学生上个月的支付金额大于1000元”.

由题设知，事件*C*，*D*相互独立，且.

所以，





=0.4×（1−0.6）+（1−0.4）×0.6

=0.52，

.

所以*X*的分布列为

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| *X* | 0 | 1 | 2 |
| *P* | 0.24 | 0.52 | 0.24 |

故*X*的数学期望*E*（*X*）=0×0.24+1×0.52+2×0.24=1.

（Ⅲ）记事件*E*为“从样本仅使用A的学生中随机抽查3人，他们本月的支付金额都大于2000元”.

假设样本仅使用A的学生中，本月支付金额大于2000元的人数没有变化，则由上个月的样本数据得.

答案示例1：可以认为有变化.理由如下：

*P*（*E*）比较小，概率比较小的事件一般不容易发生.一旦发生，就有理由认为本月的支付金额大于2000元的人数发生了变化.所以可以认为有变化.

答案示例2：无法确定有没有变化.理由如下：

事件*E*是随机事件，*P*（*E*）比较小，一般不容易发生，但还是有可能发生的，所以无法确定有没有变化.

（18）（共14分）

解：（Ⅰ）由抛物线经过点，得.

所以抛物线的方程为，其准线方程为.

（Ⅱ）抛物线的焦点为.

设直线的方程为.

由得.

设，则.

直线的方程为.

令，得点*A*的横坐标.

同理得点*B*的横坐标.

设点，则，







.

令，即，则或.

综上，以*AB*为直径的圆经过*y*轴上的定点和.

（19）（共13分）

解：（Ⅰ）由得.

令，即，得或.

又，，

所以曲线的斜率为1的切线方程是与，

即与.

（Ⅱ）令.

由得.

令得或.

的情况如下：

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |  |  |  |

所以的最小值为，最大值为.

故，即.

（Ⅲ）由（Ⅱ）知，

当时，；

当时，；

当时，.

综上，当最小时，.

（20）（共13分）

解：（Ⅰ）1，3，5，6.（答案不唯一）

（Ⅱ）设长度为*q*末项为的一个递增子列为.

由*p*<*q*，得.

因为的长度为*p*的递增子列末项的最小值为，

又是的长度为*p*的递增子列，

所以.

所以·

（Ⅲ）由题设知，所有正奇数都是中的项.

先证明：若2*m*是中的项，则2*m*必排在2*m*−1之前（*m*为正整数）.

假设2*m*排在2*m*−1之后.

设是数列的长度为*m*末项为2*m*−1的递增子列，则是数列的长度为*m*+1末项为2*m*的递增子列.与已知矛盾.

再证明：所有正偶数都是中的项.

假设存在正偶数不是中的项，设不在中的最小的正偶数为2*m*.

因为2*k*排在2*k*−1之前（*k*=1，2，…，*m*−1），所以2*k*和不可能在的同一个递增子列中.

又中不超过2*m*+1的数为1，2，…，2*m*−2，2*m*−1，2*m*+1，所以的长度为*m*+1且末项为2*m*+1的递增子列个数至多为.

与已知矛盾.

最后证明：2*m*排在2*m*−3之后（*m*≥2为整数）.

假设存在2*m*（*m*≥2），使得2*m*排在2*m*−3之前，则的长度为*m*+1且末项为2*m*+l的递增子列的个数小于.与已知矛盾.

综上，数列只可能为2，1，4，3，…，2*m*−3，2*m*，2*m*−1，….

经验证，数列2，1，4，3，…，2*m*−3，2*m*，2*m*−1，…符合条件.

所以